Hannes Konrad
Martin Wolf
Stephan Bialek
— Theoretische Physik III - Quantenmechanik — 14.12.2007
Übung 7

1 Präsenzaufgabe P7: Diracschreibweise, Orts- und Impulsraum

Betrachtet wird ein quantenmechanisches Teilchen in einer Dimension.

1.1 Teilaufgabe a)

$|p\rangle$ sei ein Eigenzustand zum Impulsoperator mit Eigenwert p. Was ist die Ortsraumdarstellung (ohne Normierung)?

Zu lösen ist folgende Eigenwertsgleichung:

$$\widehat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \tag{1}$$

Durch Multiplikation von $\langle p|$ von links an die obige Eigenwertgleichung und der Beziehung $\langle x|p\rangle = e^{\frac{ipx}{\hbar}} = \Psi_p(x)$ und dem Impulsoperator in Ortsdarstellung $\widehat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ wird diese zur Ortsraumdarstellung der Impulseigenwertgleichung:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi_p(x) = p\Psi_p(x) \tag{2}$$

1.2 Teilaufgabe b)

$\langle\Psi|$ sei ein Zustand mit der Ortsraumwellenfunktion $\Psi(x)$. Was ist die Fouriertransformierte von $\Psi(x)$ in Diracschreibweise?

$$|\Psi\rangle = \int dx\,|x\rangle\,\Psi(x) = \int dp\,|p\rangle\,\widetilde{\Psi}(p) \tag{3}$$

Durch Einfügen einer „p-Eins“ durch $1 = \int dp\, |p \otimes p|$ und der Beziehung $\langle p|x\rangle = e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ gelangt man zur Fouriertransformierten $\widetilde{\Psi}(p)$ von $\Psi(x)$:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \int dp\, |p \otimes p| \int dx\, |x\rangle\, \Psi(x) && (4)\\
&= \int dp\, |p\rangle \int dx\, \langle p|x\rangle\, \Psi(x) && (5)\\
&= \int dp\, |p\rangle \int dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\, \Psi(x) && (6)\\
&= \int dp\, |p\rangle\, \widetilde{\Psi}(p) && (7)
\end{aligned}
$$

Die Fouriertransformierten $\widetilde{\Psi}(p)$ in Diracschreibweise ist also:

$$\widetilde{\Psi}(p) = \int dx\, \langle p|x\rangle\, \Psi(x) \tag{8}$$

1.3 Teilaufgabe c)

A sei ein selbstadjungierter Operator und $|\Psi'\rangle = A\,|\Psi\rangle$. Es soll gezeigt werden, dass die Fouriertransformierte von $\Psi'(x)$ gegeben ist durch die Wirkung von A (dargestellt im Impulsraum) auf die Fouriertransformierte von $\Psi(x)$.

$$
\begin{aligned}
|\Psi'\rangle &= \int dx\, |x\rangle\, \Psi'(x) = \int dp\, |p\rangle\, \widetilde{\Psi}'(p) && (9)\\
|\Psi\rangle &= \int dx\, |x\rangle\, \Psi(x) = \int dp\, |p\rangle\, \widetilde{\Psi}(p) && (10)\\
\widetilde{\Psi}(p) &= \langle p|\Psi\rangle && (11)\\
\widetilde{\Psi}'(p) &= \langle p|\Psi'\rangle && (12)\\
&= \langle p|A|\Psi\rangle && (13)\\
&= \int dp'\, \langle p|A|p' \otimes p'|\Psi\rangle && (14)\\
&= \int dp'\, \langle p|A|p'\rangle\, \widetilde{\Psi}(p') && (15)
\end{aligned}
$$