1 Präsenzaufgabe P2: Hamilton-Jacobi-Gleichung

1.1 Teilaufgabe a)

$$0 = \delta \int dt(p\dot{q} - H(q,p,t)) \stackrel{!}{=} \delta \int dt(P\dot{Q} - K(Q,P,t)) \tag{1}$$

Mit den Relationen

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{2}$$
$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} \tag{3}$$
$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4}$$

folgt durch Addition der beiden Gleichungen 1:

$$0 = \delta \int dt[P\dot{Q} - H - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + H] \tag{5}$$

Durch Einfügen einer konstruktiven Null, hier $0 = \dot{P}Q - \frac{\partial F}{\partial P}\dot{P}$ kann weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int dt[\underbrace{P\dot{Q} + \dot{P}Q}_{\frac{d}{dt}(PQ)} \underbrace{- \frac{\partial F}{\partial P}\dot{P} - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{-\frac{d}{dt}F}] && (6) \\ &= \delta \int \frac{d}{dt}(PQ - F)dt && (7) \\ &= \delta[PQ - F]_{t_1}^{t_2} && (8) \end{aligned}$$

Die Argumente von F variieren nicht an den Punkten t_1 und t_2 und P und Q sind somit konstant. q.e.d.

1.2 Teilaufgabe b)

Aus Teilaufgabe a) ist bekannt, dass gilt: $0 = K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$. Zu zeigen ist nun, dass

$$\frac{dS}{dt} = L = p\dot{q} - H \tag{9}$$

gilt.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial P}\underbrace{\dot{P}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q}}_{=p}\dot{q} \tag{10}$$

$$= p\dot{q} - H(q,p,t) \tag{11}$$

$$= L \tag{12}$$

1.3 Teilaufgabe c)

$\rightarrow$ wurde bis dato in der Übung noch nicht besprochen!

2 Aufgabe H4

2.1 Teilaufgabe a)

Zum Beweis, dass die Hermiteschen Polynome H_n die Hermitesche Differenzialgleichung

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \tag{13}$$

lösen, soll der Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$ auf beide Seiten der folgenden Identitätsgleichung für die Hermiteschen Polynome angewendet werden:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{14}$$

Die Anwendung auf die linke Seite ergibt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{2xt-t^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x}e^{2xt-t^2} + 2t\frac{\partial}{\partial t}e^{2xt-t^2} \tag{15}$$

$$= 4te^{2xt-t^2} - 4xte^{2xt-t^2} + (-4t^2 + 4xt)e^{2xt-t^2} \tag{16}$$

$$= (4t^2 - 4xt - 4t^2 + 4xt)e^{2xt-t^2} \tag{17}$$

$$= 0 \tag{18}$$

Die Anwendung auf die rechte Seite muss das gleiche Ergebnis, wie die Anwendung auf die linke Seite (LS) ergeben, also Null. Für die rechte Seite folgt somit:

$$LS = 0 \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2x\frac{\partial}{\partial x}H_n(x)\frac{t^n}{n!} + 2t\frac{\partial}{\partial t}H_n(x)\frac{t^n}{n!}] \tag{19}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}[H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x)] \tag{20}$$

Die obige Beziehung ist offensichtlich nur Null für alle t, wenn alle Summanden gleich Null sind, also demzufolge die Hermitesche DGL 13 Null ist. Die Hermiteschen Polynome H_n lösen also die Hermitesche DGL. q.e.d.

2.2 Teilaufgabe b)

Die gegebene Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Phi_n''(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\Phi_n(x) = E_n\Phi_n(x) \tag{21}$$

mit

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \tag{22}$$

lässt sich zunächst einmal mit den Substitutionen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{23}$$

$$\lambda = \frac{2E_n}{\hbar\omega} \tag{24}$$

$$\Phi_n''(x) = \frac{m\omega}{\hbar}\Phi_n''(y) \tag{25}$$

in die WEBER'sche Differenzialgleichung umformen:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Phi_n''(x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2\Phi_n(x) + E_n\Phi_n(x) = 0 \tag{26}$$

$$\Phi_n''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - \frac{m\omega^2}{2}x^2)\Phi_n(x) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{m\omega}{\hbar}\Phi_n''(y) + (\frac{2m}{\hbar^2}E_n - \frac{m\omega}{\hbar}y^2)\Phi_n(y) = 0 \tag{28}$$

$$\Phi_n''(y) + (\lambda - y^2)\Phi_n(y) = 0 \tag{29}$$

Für die Wellenfunktion $\Phi_n(y)$ und deren zweite Ableitung $\Phi_n''(y)$ gilt mit der Normierungskonstanten $N_n \equiv (n!2^n\sqrt{\pi})^{-1/2}$:

$$\Phi_n(y) = N_n e^{-y^2/2}H_n(y) \tag{30}$$

$$\Phi_n'(y) = N_n e^{-\frac{y^2}{2}}(H_n'(y) - yH_n(y)) \tag{31}$$

$$\Phi_n''(y) = N_n e^{-\frac{y^2}{2}}(H_n''(y) - 2yH_n'(y) + (y^2-1)H_n(y)) \tag{32}$$

Das Einsetzen von $\Phi_n''(y)$ in die WEBER'sche Differenzialgleichung 29 ergibt:

$$N_n e^{-\frac{y^2}{2}}[H_n''(y) - 2yH_n'(y) + (y^2-1)H_n(y)] + (\lambda - y^2)N_n e^{-\frac{y^2}{2}}H_n(y) = 0 \tag{33}$$

$$N_n e^{-\frac{y^2}{2}}[H_n''(y) - 2yH_n'(y) + (\lambda-1)H_n(y)] = 0 \tag{34}$$

Mit Hilfe der hermiteschen Differentialgleichung 13 aus Aufgabenteil a) dieser Aufgabe kann die obige Gleichung gelöst werden, wenn man $(\lambda - 1) = 2n$ setzt. Für den Energieeigenwert folgt damit die vorrausgesetzte Beziehung:

$$\frac{2E_n}{\hbar\omega} - 1 = 2n \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \tag{35}$$

$\phi_n(x) \equiv \Phi_n(\sqrt{m\omega/\hbar}x)$ erfüllt somit die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators. q.e.d.

3 Aufgabe H5

3.1 Teilaufgabe a)

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{C}$ der Zustand

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{36}$$

Dabei bezeichnet $|n\rangle$ den n-ten angeregten Zustand:

$$|n\rangle = \Phi_n(x) \quad = \quad N_n e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{37}$$

Mit der Substitution $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$ haben die Auf- und Absteigeoperatoren folgende Gestalt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi) \tag{38}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi) \tag{39}$$

Die Eigenzustandsgleichung lautet:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{40}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{41}$$

Für die linke Seite folgt also:

$$a|\alpha\rangle \quad = \quad e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}(a|n\rangle) \tag{42}$$

$$= \quad e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}\alpha}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

Da die Eigenwertgleichung nur für $n \geq 1$ gültig ist, kann der Summenindex verschoben werden und es gilt:

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{45}$$

und somit die Eigenwertgleichung. Für die Normierung muss gelten $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Es folgt also:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-|\alpha|^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k}}{\sqrt{k!}} N_k e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_k(\xi)\right) && (46)\\
&= e^{-|\alpha|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\alpha^k}{\sqrt{n!}\sqrt{k!}} N_n N_k e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_k(\xi) && (47)\\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\alpha^k}{\sqrt{n!}\sqrt{k!}} \underbrace{N_n N_k \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_k(\xi)}_{=\delta_{n,k},\text{ da } \{\Phi_n | n\in\mathbb{N}\} \text{ Orthonormalsystem}} && (48)\\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\alpha^n}{n!} && (49)\\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|)^n}{n!} && (50)\\
&= e^{-|\alpha|^2} e^{+|\alpha|^2} && (51)\\
&= 1 && (52)
\end{aligned}$$

3.2 Teilaufgabe b)

Die Operatoren X, P, X^2, P^2 und H haben mit den Auf- und Absteigeoperatoren die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
X &= x && (53)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) && (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x} && (55)\\
&= i\hbar \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial \xi} && (56)\\
&= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger) && (57)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2 && (58)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2+{a^\dagger}^2+aa^\dagger+a^\dagger a) && (59)\\
&\overset{[a,a^\dagger]=1}{=} \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2+{a^\dagger}^2+a^\dagger a+1) && (60)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^2 &= -\frac{m\omega\hbar}{2}(a-a^\dagger)^2 && (61)\\
&= -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^2+{a^\dagger}^2-2a^\dagger a-1) && (62)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{-P^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}X^2 && (63)\\
&= \frac{m\omega}{2}(a^2+{a^\dagger}^2) && (64)
\end{aligned}
$$

Damit gilt mit $a\langle\alpha| = a\,|\alpha^*\rangle = \alpha^*\,|\alpha^*\rangle = \alpha^*\langle\alpha|$ für die Erwartungswerte $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$, $\langle X^2\rangle$ und $\langle P^2\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \langle\alpha|X|\alpha\rangle && (65)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle\alpha|a|\alpha\rangle+\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle\right) && (66)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha\underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{=1}+(a\langle\alpha|)\,|\alpha\rangle\right) && (67)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha+\alpha^*\langle\alpha|\alpha\rangle\right) && (68)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha+\alpha^*\right) && (69)\\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re(\alpha) && (70)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \langle \alpha | P | \alpha \rangle && (71)\\
&= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left\langle \alpha | a - a^\dagger | \alpha \right\rangle && (72)\\
&= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(\langle \alpha | a | \alpha \rangle - \left\langle \alpha | a^\dagger | \alpha \right\rangle \right) && (73)\\
&= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(\alpha - \alpha^* \right) && (74)\\
&= -\sqrt{2m\omega\hbar}\,\Im(\alpha) && (75)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\underbrace{\left\langle \alpha | a^2 | \alpha \right\rangle}_{\alpha^2} + \underbrace{\left\langle \alpha | {a^\dagger}^2 | \alpha \right\rangle}_{\alpha^{*2}} + \underbrace{\left\langle \alpha | 2a^\dagger a | \alpha \right\rangle}_{2(a\langle\alpha|)a|\alpha\rangle} + \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{1} \right) && (76)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha^*\alpha + 1 \right) && (77)\\
&\overset{\alpha^2+\alpha^{*2}=2(\Re(\alpha)^2-\Im(\alpha)^2)}{=} \frac{\hbar}{m\omega} \left(\Re(\alpha)^2 - \Im(\alpha)^2 + |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) && (78)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle P^2 \right\rangle &= -\frac{m\omega\hbar}{2} \left(\left\langle \alpha | a^2 | \alpha \right\rangle + \left\langle \alpha | {a^\dagger}^2 | \alpha \right\rangle - 2\left\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \right\rangle - \langle \alpha | \alpha \rangle \right) && (79)\\
&= -\frac{m\omega\hbar}{2} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2 - 1 \right) && (80)\\
&= m\omega\hbar \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} - \Re(\alpha)^2 + \Im(\alpha)^2 \right) && (81)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \langle \alpha | H | \alpha \rangle && (82)\\
&= \frac{\omega\hbar}{2} \left(\left\langle \alpha | a^2 | \alpha \right\rangle + \left\langle \alpha | {a^\dagger}^2 | \alpha \right\rangle \right) && (83)\\
&= \frac{\omega\hbar}{2} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} \right) && (84)\\
&= \omega\hbar \left(\Re(\alpha)^2 - \Im(\alpha)^2 \right) && (85)
\end{aligned}
$$

Für $(\Delta X)^2$ und $(\Delta P)^2$ folgt:

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \tag{86}$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}\left(\underbrace{-\Re(\alpha)^2 - \Im(\alpha)^2}_{-|\alpha|^2} + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right) \tag{87}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{88}$$

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{89}$$

$$(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 \tag{90}$$

$$= m\omega\hbar\left(-\Re(\alpha)^2 - \Im(\alpha)^2 + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right) \tag{91}$$

$$= \frac{m\omega\hbar}{2} \tag{92}$$

$$\Delta P = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \tag{93}$$

Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist also erfüllt:

$$\Delta X \Delta P = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \tag{94}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \tag{95}$$

3.3 Teilaufgabe c)

Angenommen der Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\alpha_0\rangle$ mit $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$, dann gilt für $|\alpha_0\rangle$:

$$|\alpha_0\rangle = e^{-\frac{|\alpha_0|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{96}$$

Um die Zeitentwicklung zu erhalten muss der Hamiltonoperator auf den Anfangszustand angewendet werden. Es gilt zunächst für den n-ten angeregten Zustand:

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle \tag{97}$$

$$|n(t)\rangle = |n\rangle e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \tag{98}$$

Damit folgt für die Zeitentwicklung des Zustandes $|\alpha_t\rangle$:

$$|\alpha_t\rangle = e^{-\frac{|\alpha_0|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle \tag{99}$$

$$= e^{-i\frac{\omega t}{2}} e^{-\frac{|\alpha_0|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n e^{i(n\phi - n\omega t)}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{100}$$

$$= e^{-i\frac{\omega t}{2}} e^{-\frac{|\alpha_0|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{101}$$

$$\overset{\alpha(t)=\rho e^{i(\phi-\omega t)}}{=} e^{-i\frac{\omega t}{2}} |\alpha(t)\rangle \tag{102}$$

3.4 Teilaufgabe d)

Die Erwartungswerte $\langle X\rangle$ und $\langle P\rangle$ lassen sich mittels Winkelfunktionen auch schreiben als:

$$\langle X\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \varrho \cos(\phi - \omega t) \tag{103}$$

$$\langle P\rangle = -\sqrt{2m\omega\hbar} \varrho \sin(\phi - \omega t) \tag{104}$$

Wie man sieht, sind die Erwartungswerte bis auf den Vorfaktor identisch mit den x und p Werten des klassischen harmonischen Oszillators. Das Wellenpaket verhält sich also quasi klassisch wie ein Teilchen. Auf Grund dieser Eigenschaft nennt man einen solchen Zustand einen „quasiklassischen Zustand“.