M 3 Elastizitätsmodul

1. Aufgabenstellung

1.1 Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E verschiedener Metalle aus der Biegung von Stäben.

1.2 Stellen Sie den Biegepfeil s in Abhängigkeit von der Belastung F grafisch dar und überprüfen Sie die Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes.

1.3 Führen Sie eine Größtfehlerberechnung zu Ihren Messungen durch.

2. Theoretische Grundlagen

Stichworte zur Vorbereitung :

Spannungs-Dehnungs-Diagramm, HOOKE'sches Gesetz, Elastizitätsmodul, Flächenträgheitsmoment, elastische Konstanten

Literatur :

W. Ilberg, M. Krötzsch	Physikalisches Praktikum, Mechanik, Kap. 5, Teubner Verlag 1992
A. Recknagel	Physik, Mechanik, Kap. 9, Verlag Technik 1955
E. Grimsehl	Lehrbuch der Physik, Bd. I, Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Kap. 6, Elastizität und Festigkeit Teubner Verlag 1991
H. J. Paus	Physik in Experimenten und Beispielen Kap. 15 Hanser Verlag 1995

Ideal starre Körper treten in der Natur nicht auf. Jeder Körper erfährt durch eine angreifende Kraft eine Deformation. Im Versuch soll am Beispiel der Durchbiegung von Stäben der Zusammenhang zwischen den Kräften, die an einem Festkörper angreifen, und den dabei auftretenden Deformationen des Festkörpers untersucht werden. Je nach der Art der Einwirkung äußerer Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Körperfläche werden verschiedene Spannungszustände, wie z. B. Längsdehnung, Querkontraktion, Scherung oder Torsion beobachtet. Der Elastizitätsmodul E ist nur eine der elastischen Konstanten, deren Bedeutung im folgenden kurz erklärt wird.

Ein Metallstab werde durch eine Zugkraft F_n belastet, er wird dabei länger. Der Quotient aus der in Längsrichtung des Stabes wirkenden Kraft F_n und der Querschnittsfläche A wird Normalspannung σ genannt (Abb. 1). Der Zusammenhang zwischen Belastung σ und relativer Längenänderung des Stabes $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$ ist in dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abb. 1 dargestellt. Die im Stabquerschnitt wirksame Spannung ist auf den unbelasteten Querschnitt A_0 bezogen.

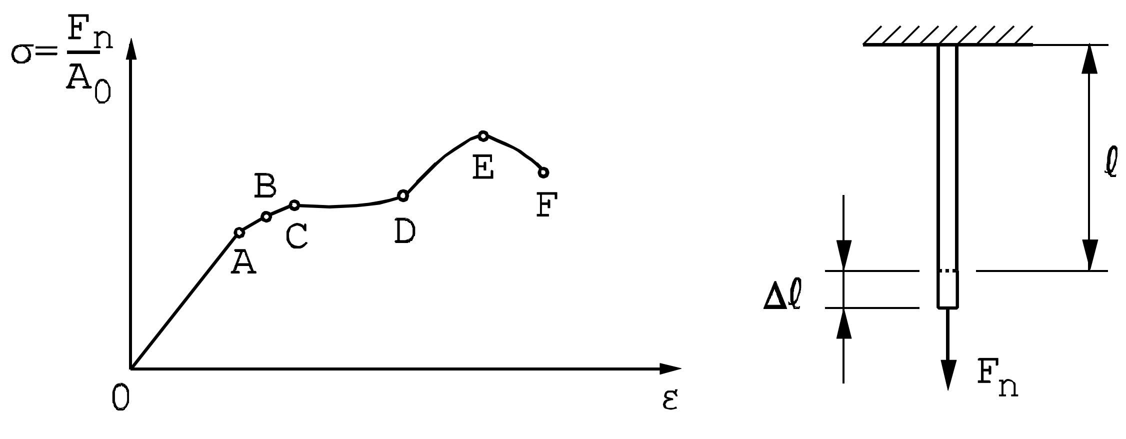

Abb. 1 : Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Zugversuch / Längsdehnung

Bis zum Punkt A, der Proportionalitätsgrenze, ist die Dehnung der Spannung proportional. Unterhalb der Elastizitätsgrenze B gehen Volumen und Gestalt des

Körpers nach Aufhören der Belastung in ihren ursprünglichen Zustand zurück, der Körper verhält sich elastisch. Oberhalb von B nimmt der Körper nach Verschwinden der Kraft die ursprüngliche Gestalt nicht mehr ein, das Material verhält sich plastisch. Oberhalb des Punktes C, der sogenannten Fließgrenze, dehnt sich der Körper weiter, ohne dass die Belastung zunimmt. Oberhalb von D kommt es wieder zu einer Verfestigung, bis der Draht sich bei E an der späteren Bruchstelle einschnürt und schließlich bei F reißt.

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm sieht bei verschiedenen Stoffen qualitativ ähnlich aus, jedoch unterscheiden sich die einzelnen Bereiche in ihrer Ausdehnung oft wesentlich.

Neben der Belastungsabhängigkeit beobachtet man auch eine Zeitabhängigkeit der Verformung. Man erreicht den Endwert einer Formänderung auch im elastischen Bereich erst nach einer gewissen Zeit (elastische Nachwirkung). Eine andere Erscheinung, die elastische Hysterese, besteht im Auftreten einer Restdeformation bei völliger Entlastung, sie ist durch entgegengesetzte Belastung zu beseitigen. Die Ursache dieser Erscheinung sind Fehler im Kristallbau.

Physikalisch anschaulich läßt sich dieses Verhalten deuten, wenn man berücksichtigt, dass feste Körper aus Gitterbausteinen aufgebaut sind, die in Form eines Raumgitters angeordnet sind und die sich durch anziehende und abstoßende Kräfte zwischen den Bausteinen im stabilen Gleichgewicht befinden. Durch nicht zu große äußere Kräfte F werden die Abstände der Gitterbausteine verändert und dadurch innere Kräfte F_i hervorgerufen, die nach der äußeren Krafteinwirkung die alte Gleichgewichtslage wieder herstellen (elastisches Verhalten). Durch größere äußere Kräfte können die Gitterebenen gegeneinander verschoben werden. Die Gitterbausteine gelangen dabei in neue stabile Gleichgewichtslagen, die sie nach dem Aufhören der äußeren Krafteinwirkung beibehalten (plastisches Verhalten).

Im Gültigkeitsbereich des HOOKE'schen Gesetz gilt

$$\sigma = E\,\varepsilon \quad . \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor E heißt Elastizitätsmodul, ist materialspezifisch und ein Maß für den Anstieg der HOOKE'schen Geraden im linearen Teil des Spannung-Dehnungs-Diagramms (Abb. 1).

3. Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung eines Stabes

Bei Verwendung von Metallstäben mit konstantem Querschnitt läßt sich der oben beschriebene Zugversuch nur schwer realisieren (sehr große Zugkräfte, geringe Dehnung). In diesen Fällen erfolgt die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der bei Belastung auftretenden Biegung der Stäbe.

Ein Stab wird auf zwei Auflageschneiden gelagert, die den Abstand ℓ voneinander haben und in deren Mitte durch eine Kraft F_G auf Biegung belastet. Dabei verformt sich der Stab in der Weise, dass er oberhalb der neutralen Faser verkürzt und unterhalb verlängert wird (Abb. 2). Als neutrale Faser wird beim Biegevorgang die parallel zur Stablängsachse liegende Fläche bezeichnet, die ihre ursprüngliche Länge beibehält, also weder gestaucht noch gedehnt wird. Die Auslenkung des Angriffspunktes der Kraft aus seiner ursprünglichen Lage heißt Biegepfeil s.

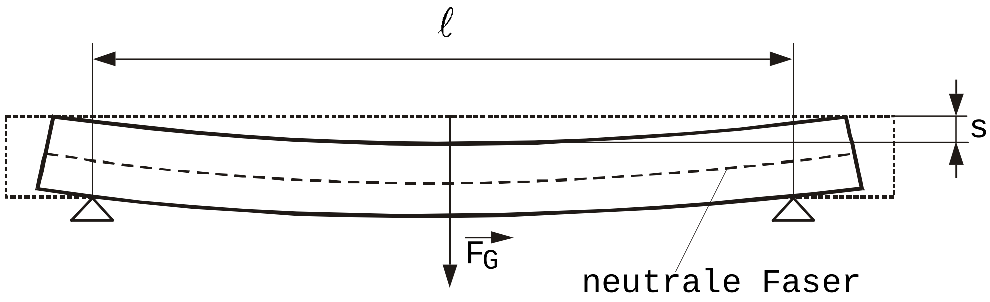

Abb. 2 : Prinzip des Biegeversuches

Durch Messung von s kann der Elastizitätsmodul E berechnet werden. Der Biegepfeil wird um so größer, je länger der Stab und je größer die wirkende Kraft ist. Er ist um so kleiner, je weniger dehnbar das Material ist, d. h., je größer sein Elastizitätsmodul ist. Der exakte Zusammenhang lautet

$$s = \frac{F_G \, \ell^3}{48 \; I_F \, E} \quad . \tag{2}$$

Dabei ist I_F das Flächenträgheitsmoment bezüglich der neutralen Faser.

I_F wird durch die Querschnittsform (Profil) des Stabes in Biegerichtung bestimmt. Durch Umstellen von Gl. (2) nach E läßt sich dieser aus den Messgrößen berechnen.

Zur quantitativen Herleitung von Gl. (2) dient folgende Überlegung:

Bei der vorliegenden symmetrischen Belastung betragen beide Auflagekräfte $\vec{F}_A = -\vec{F}_G/2$ (Abb. 2). Deshalb wird die gleiche Verformung des Stabes erreicht, wenn der Stab nicht an den Enden aufliegt und in der Mitte durch F_G (Gewichtskraft) belastet wird, sondern in der Mitte eingespannt und an den Schneiden durch zwei senkrecht nach oben wirkende Kräfte $\vec{F}_A$ belastet wird.

Zunächst soll für den in Abb. 3 dargestellten Stab mit rechteckigem Querschnitt

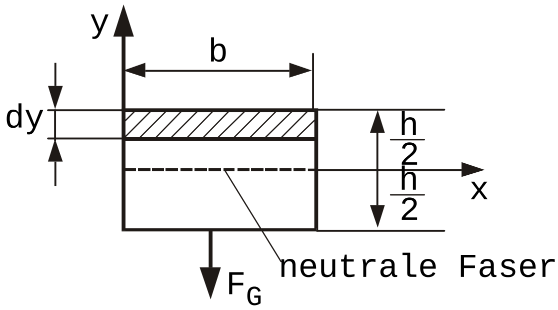

Abb. 3 :Lage der neutralen Faser bei rechteckigem Querschnitt

das Flächenträgheitsmoment I_F berechnet werden. Die neutrale Faser ist aus Symmetriegründen die Ebene in der Mitte der Querschnittsfläche.

Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes legt man den Ursprung des Koordinatensystems günstigerweise so, dass die neutrale Faser in der Abszisse verläuft (Abb. 3). Das Flächenträgheitsmoment des Stabes bezüglich der neutralen Faser lautet per Definition (s. auch Gl. 9)

$$I_F = \int y^2 \, dA \quad , \tag{3}$$

worin y den Abstand des Flächenelementes dA von der neutralen Faser angibt. Mit dem Flächenelement $dA = b\,dy$ erhält man für ein Rechteck (Abb. 3)

$$I_F = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b\, y^2\, dy = \frac{h^3 b}{12} \quad . \tag{4}$$

Im weiteren sollen die bei der Durchbiegung des Stabes auftretenden Deformationen und Rückstellkräfte betrachtet werden. Die Endflächen A eines kleinen Stabelementes der Länge dx im Abstand x von der Auflage werden durch die Belastung um den Winkel $d\beta$ gegeneinander verkippt (Abb.4). Dem äußeren Drehmoment wirkt dann in jedem Abstand y von der neutralen Faser ein durch die elastischen Rückstellkräfte bewirktes Drehmoment dM entgegen

$$dM = y\, dF = y\, \sigma\, dA \quad . \tag{5}$$

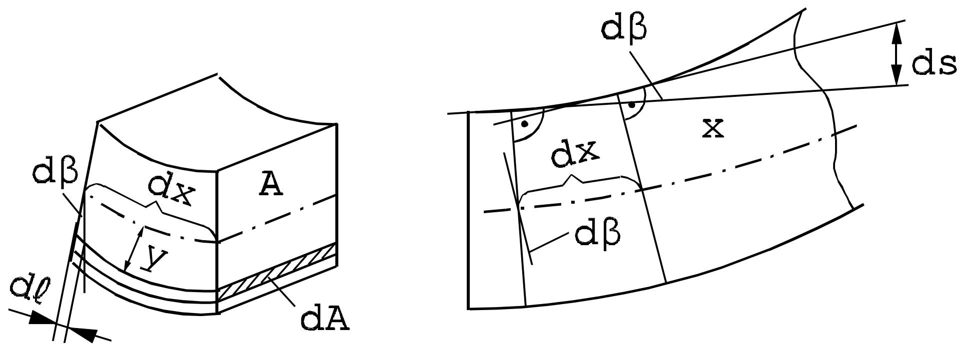

Abb. 4: Deformiertes Längenelement

Die Spannung σ ist der Dehnung $\varepsilon = \dfrac{Längenänderung\ d\ell}{ursprüngliche\ Länge\ dx}$ (6)

proportional.

$$\sigma = E \frac{d\ell}{dx} \quad . \tag{7}$$

Für die Längenänderung $d\ell$ einer Faser im Abstand von der neutralen Faser gilt

$d\ell = y\, d\beta$. Weiterhin gilt für den Beitrag ds, den das betrachtete Längenelement im Abstand x vom Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}_A$ zur Durchbiegung des Stabes liefert, $ds = x\, d\beta$. Damit folgt für dM

$$dM = \frac{E}{x} \frac{ds}{dx} y^2 \, dA \quad . \tag{8}$$

Das am ganzen Querschnitt A angreifende Drehmoment ist dann

$$M = \frac{E}{x} \frac{ds}{dx} \int_A y^2 \, dA = \frac{E}{x} \frac{ds}{dx} I_F \quad . \tag{9}$$

Dieses durch die elastischen Gegenkräfte hervorgerufene Drehmoment M muß betragsmäßig dem durch die äußere Kraft $F_A = F_G/2$ hervorgerufenen Moment M_G im Abstand x (Abb. 3)

$$M_G = F_G \, x/2 \tag{10}$$

gleich sein.

Mit $M(x) = M_G(x)$ ergibt sich durch Umstellung für die Durchbiegung ds

$$ds = \frac{F_G}{2\, E\, I} x^2 \, dx \quad , \tag{11}$$

und die gesamte Durchbiegung wird nach Integration

$$s = \frac{F_G}{2\, E\, I} \int_{x=0}^{\ell/2} x^2 \, dx = \frac{F_G \, \ell^3}{48\, E\, I} \quad , \tag{12}$$

was mit Gl. (2) identisch ist.

4. Versuchsdurchführung

Zunächst sind zwei Probestäbe aus unterschiedlichem Material auszuwählen. Die Querschnittsabmessungen der Versuchsstäbe werden mit dem Messschieber, der Abstand zwischen den beiden Auflagen mit dem Stahlmaßstab und die Durchbiegung s mit der installierten Messuhr gemessen. Nach Auflegen des Probestabes wird der Lastenträger (zur Aufnahme der Massestücke) mit seiner Schneide auf den Probestab gesetzt. Die Schneide platziert man dabei genau über dem Fühler der Messuhr. Das Messen des Biegepfeiles s bei zunehmender und abnehmender Last erfolgt durch schrittweises Auflegen und nachfolgendes Abnehmen der fünf Massestücke. Ein derartiger Messzyklus liefert demnach neun Wertepaare von Last und zugehörigem Biegepfeil.

- Ein solcher Messzyklus wird für jeden Probestab dreimal durchgeführt.
- Nach jedem Messzyklus wird der Nullpunkt der Messuhr erneut justiert.
- Die Gewichtskraft, die durch ein Massestück realisiert wird, beträgt $F_g = 5$ N, der relative Fehler ist $\Delta F_g / F_g = 0{,}1\ \%$.
- Der systematische Fehler der Messuhr beträgt im speziellen Einzelfall $x = \pm 0{,}015$ mm.

5. Kontrollfragen

5.1 Welchen Zusammenhang beobachtet man zwischen Spannung und Dehnung, wenn man einen festen Körper über seine Elastizitätsgrenze hinaus belastet?

5.2 Was versteht man unter dem Begriff der mechanischen bzw. elastischen Hysterese?

5.3 Welcher Zusammenhang besteht zwischen relativer Volumenänderung , Querkontraktionszahl (POISSON-Zahl) und Elastizitätsmodul?

5.4 Ein quaderförmiger Holzbalken ist über eine Baugrube gelegt. Um welchen Faktor ändert sich die Durchbiegung, wenn man ihn

a) durch einen doppelt so breiten und

b) durch einen doppelt so hohen Balken des gleichen Materials ersetzt?