M14 Verteilung zufälliger Fehler

1. Aufgabenstellung

1.1 Untersuchen Sie die Verteilung von N gleichartigen Messwerten um den Mittelwert.

1.2 Untersuchen Sie qualitativ die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels von seiner Amplitude.

Die Versuchsdurchführung erfolgt im Dialog mit einem PC über den auch die Hinweise für die Auswertung und die Darstellung der Resultate gegeben werden.

2. Theoretische Grundlagen:

mathematisches Pendel, Messungen und Messfehler, Verteilung von Messwerten, Überprüfung einer Serie von Messwerten auf Übereinstimmung mit der GAUSSschen Normalverteilung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes (speziell geteiltes Funktionspapier).

Literatur :

W. Ilberg, M. Krötzsch	Physikalisches Praktikum für Anfänger, Einführung, Kap. 1.5, Mechanik 3.01, Teubner Verlag, 1992
A. Recknagel	Physik, Bd. Mechanik, Kap. 3.16 Verlag Technik Berlin 1986
R. Ludwig	Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung, Kap. 2, 3.1 und 3.3, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969,
D. Mende, H. Wollmann, W. Kretschmar,	Physikpraktikum, Kap. 2, Fachbuchverlag Leipzig 1989

2.1 mathematisches Pendel

Die rücktreibende Kraft beträgt beim mathematischen Pendel

$$F_R = -mg \sin \varphi \quad .$$

Für kleine Ausschläge gilt $\sin \varphi \approx \varphi$, und man erhält die rücktreibende Kraft für die harmonische Schwingung

$$F'_R = -mg\, \varphi \quad .$$

Abb. 1 verdeutlicht die Auswirkung der Näherung.

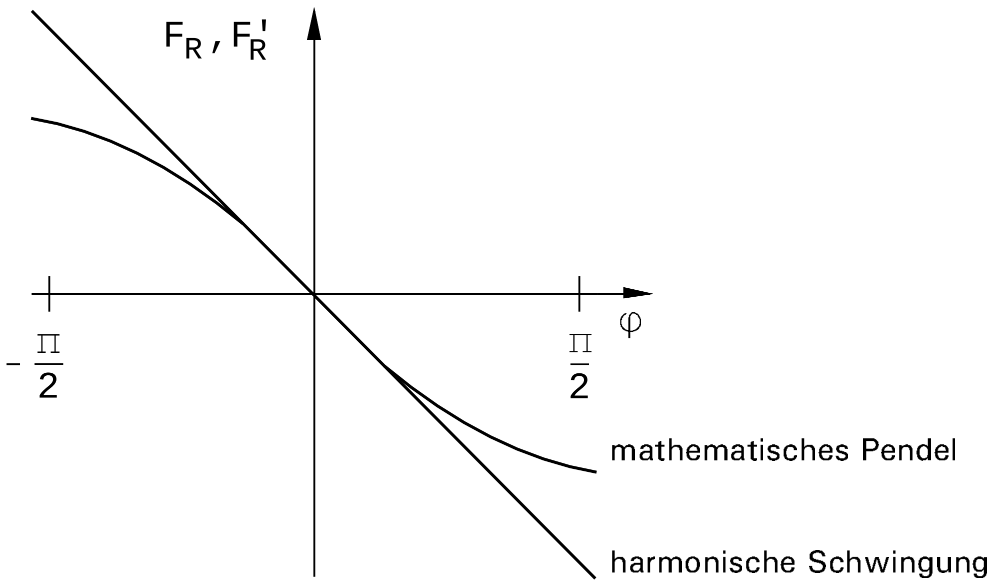

Abb. 1 : Abhängigkeit der rücktreibenden Kräfte vom Auslenkwinkel φ

Insbesondere für große Ausschläge ist die tatsächlich wirkende rücktreibende Kraft stets kleiner als das bei der Näherung angenommen wurde. Für die Näherung ist aber $T = \text{const.}$, d. h. unabhängig von φ_{max} !

2.2 Messfehler

Eine physikalische Messung liefert nicht den wahren Wert einer physikalischen Größe, sondern den Messwert. Die Differenz zwischen Messwert und wahrem Wert ist die Messabweichung. Aus historischen Gründen bezeichnen wir die Messabweichung als Messfehler. Das Messergebnis kann verfälscht sein durch Unvollkommenheiten des Messverfahrens, Messgegenstandes und der Messgeräte, Umwelteinflüsse, die begrenzte Schärfe der Sinneswahrnehmung sowie durch gesetzmäßige statistische Schwankungen der untersuchten physikalischen Erscheinung selbst. Nach ihren Ursachen unterscheidet man grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler

Grobe Fehler beruhen auf Irrtümern, falschen oder nachlässigen Ablesungen, auf einem ungeeigneten Mess- oder Auswertungsverfahren oder auf starken äußeren Störeinflüssen. Gegen solche Fehler hilft nur äußerste Sorgfalt sowie Überprüfungen und Kontrollen bei der Messung. Grobe Fehler lassen sich daher vermeiden, die Messunsicherheit eines Ergebnisses sollte keine Anteile von groben Fehlern enthalten! In den folgenden Ausführungen werden daher grobe Fehler nicht weiter betrachtet.

Systematische Fehler

Systematische Fehler haben Ursachen, die im einzelnen wenigstens im Prinzip erkannt und korrigiert werden können. Sie besitzen ein bestimmtes Vorzeichen und einen bestimmten Betrag und treten in jeder Wiederholung der Messung in gleicher Weise wieder auf.

Bei gesetzmäßiger Änderung der Versuchsbedingungen ändert sich auch der Fehler gesetzmäßig. Systematische Fehler sind grundsätzlich erfassbar, wenn auch die tatsächliche Erfassung in vielen Fällen außerordentliches Geschick und Erfahrung des Experimentators erfordert.

Zufällige Fehler

Die zufälligen Fehler sind unvermeidliche Messfehler und werden verursacht durch messtechnisch nicht erfassbare Änderung der Messgeräte, des Messgegenstandes, sowie durch unkontrollierbare Umwelteinflüsse und Unvollkommenheiten der Sinnesorgane. Die zufälligen Fehler schwanken regellos nach Betrag und Vorzeichen. Wenn sich bei einer Messung ein Wert größer als der wahre Wert ergeben hat, so ist bei einer nachfolgenden Messung ebenso wahrscheinlich, dass sich ein kleiner Wert als der wahre ergibt. Wiederholt der Beobachter unter gleichen Bedingungen die Messung mehrmals, so weichen die einzelnen Messwerte voneinander ab, sie “streuen”. Aus den zufälligen streuenden Messwerten kann man mit Hilfe statistischer Betrachtungen geeignete Mittelwerte für die Messgröße und ihre

Fehler gewinnen. Voraussetzung für die Erfassung von zufälligen Fehlern ist, dass eine hinreichend kleine Ableseunsicherheit existiert, um die vorhandene Streuung beobachten zu können.

2.3 GAUSSsches Fehlerverteilungsgesetz

Eine physikalische Größe X werde n-mal gemessen. Die Messwerte seien $x_1, x_2, ...x_n$. Sie häufen sich bei dem wahrscheinlichsten Wert der Messgröße $\overline{x}$. Es wird angenommen, dass nur zufällige Fehler die Messung beeinflussen. Wenn man den Wertebereich der Messgröße X in Intervalle der Breite Δx einteilt (Klasseneinteilung) und die Anzahl der in die k-te Klasse fallenden Messwerte n_k jeweils über der Mitte x_k des Intervalls aufträgt, so ergibt die Darstellung der Häufigkeitsverteilung ein Säulendiagramm (Abb. 2).

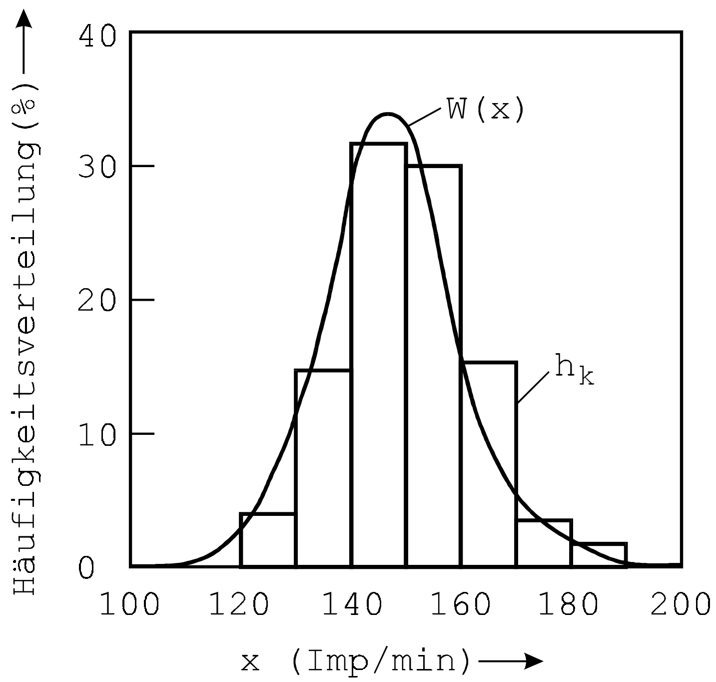

Abb. 2: Häufigkeitsverteilung einer Messreihe, eingezeichnet ist die Häufigkeit der Messwerte h_k im Intervall $\Delta x = 10\, Imp/min$ (Säulendiagramm) und die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ nach Gl. (5)

Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass ein im k-ten Intervall liegender Wert gemessen wird, beträgt

$$W = w(x) \cdot \Delta x = \frac{n_k}{n} = h_k \quad . \tag{1}$$

Die Verteilungsfunktion $w(x)$ wird als Wahrscheinlichkeitsdichte und h_k als Häufigkeit bezeichnet.

Es sollen n Messungen vorliegen. Der beste Schätzwert für den wahren Wert ist das arithmetische Mittel.

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

Ein Maß zur Charakterisierung der mittleren Streuung der Messwerte ist die Standardabweichung s (Varianz s^2)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \quad . \tag{3}$$

Der Nenner $n-1$ berücksichtigt, dass bei einer einzigen Messung aufgrund statistischer Überlegungen keinerlei Angaben über den Fehler gemacht werden können. Die Standardabweichung s ist weitgehend unabhängig von der Anzahl n der Messungen.

Die Mittelwerte der einzelnen Messreihen sind nicht gleich, sie streuen um den wahren Wert. Eine Größe, die angibt, wie sicher der Mittelwert $\overline{x}$ ist, ist die Standardabweichung des Mittelwertes m (Varianz m^2)

$$m = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad . \tag{4}$$

Demzufolge verringert sich die Streubreite $\Delta\overline{x} = m$ des Mittelwertes einer Messreihe nur mit der Wurzel aus der Anzahl der Messungen. Deshalb sind wenige sorgfältige Messungen einer großen Zahl oberflächlichen Messungen vorzuziehen. Führt man den Grenzübergang $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$ durch, so geht die Häufigkeitsverteilung in die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(x)$ über. Fallen die Messwerte rein statistisch an, dann sind diese häufig (nicht immer) normal verteilt und $w(x)$ ist dann eine Normal oder GAUSS-Verteilung

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{5a}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1 \quad . \tag{5b}$$

Die Normalverteilung wird durch den wahren Wert μ und der Standardabweichung der Grundgesamtheit σ gekennzeichnet. (Die Größen $\overline{x}$ und s sind Schätzwerte für μ und σ.

2.4 Vertrauensbereich des Mittelwertes

Die statistische Sicherheit, mit der der wahre Wert in den Intervallgrenzen von $\overline{x} - t \cdot \Delta\overline{x}$ bis $\overline{x} + t \cdot \Delta\overline{x}$ liegt, ist für eine GAUSSsche Normalverteilung in der folgenden Tabelle angegeben:

Parameter t	Statistische Sicherheit
1	68,3 %
2	95,4 %
3	99,7 %

Das Intervall $(\overline{x} - t\ \Delta\overline{x})$ bis $(\overline{x} + t\ \Delta\overline{x})$ bezeichnet man als Vertrauensbereich des Mittelwertes. Unter Praktikumsbedingungen genügt $t = 2$, d. h. eine statische Sicherheit von 95%. Dafür sind allerdings wenigstens 10 Messungen einer Größe x unter gleichen Bedingungen erforderlich.

2.5 Statistische Sicherheit der Einzelmessungen

Die Wahrscheinlichkeit $W(a)$ dafür, dass ein Messwert einer Messreihe in einem Intervall der Breite a zu beiden Seiten des Mittelwertes $\overline{x}$ liegt, kann mit Gl. (2) folgendermaßen berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
W(a) &= \int_{\bar{x}-a}^{\bar{x}+a} w(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-a}^{\bar{x}+a} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \quad .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

In der folgenden Tabelle sind für einige charakteristische Werte von a die nach dieser Gleichung berechneten Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Parameter a	$W(a)$
σ / 2	0,383
σ	0,683
2 σ	0,954
3 σ	0,997
∞	1,0

2.6. Überprüfung des statistischen Charakters einer Messreihe

Wenn eine GAUSSsche Normalverteilung der Messwerte vorliegt, kann entsprechend die Wahrscheinlichkeit $W(x)$ dafür, dass ein einzelner Messwert im Intervall zwischen $-\infty$ und x liegt, wie folgt berechnet werden:

$$
W(x) = \int_{-\infty}^{x} w(z)\, dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dz \; . \tag{7}
$$

Die Funktion $W(x)$ heißt GAUSSsches Fehlerintegral. In der grafischen Darstellung ergibt sich eine S-förmige Kurve. Benutzt man für die Darstellung keine lineare, sondern eine invers zum Fehlerintegral geteilte Ordinatenteilung (Wahrscheinlichkeitsnetz), so geht die S-Kurve in eine Gerade über.

Zur Kontrolle des statistischen Charakters einer Messreihe geht man folgendermaßen vor:

1. Der Wertebereich, in dem die Messwerte liegen, wird in r gleich großen Intervalle Δx eingeteilt, die jeweils den Zentralwert x_k besitzen.

2. Die Anzahl n_k der Messwerte im k-ten Intervall wird bestimmt.

3. Die Häufigkeit $h_k = n_k / n$ $(mit\ n = \sum_{k=1}^{r} n_k)$ der Messwerte im k-ten Intervall wird berechnet.

4. Die Summenhäufigkeit $H(i) = \sum_{k=1}^{i} h_k$ wird ermittelt und in das Wahrscheinlichkeitsnetz eingetragen.

Bei einer Normalverteilung der Messwerte fallen die ermittelten Summenhäufigkeiten $H(i)$ mit der Funktion $W(x)$ nach Gl. (7) zusammen und liegen deshalb im Wahrscheinlichkeitsnetz auf einer Geraden. Aus der grafischen Darstellung kann der Mittelwert $\overline{x}$ der Messreihe bei $W(x) = 50\ \%$ und die Standardabweichung σ bestimmt werden.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messen Sie insgesamt 200 mal die Dauer einer Schwingung T_k des mathematischen Pendels, wobei Sie die Zeitmessung mit Hand (Morsetaste) auslösen. Wählen Sie einen Umkehrpunkt des Pendels als Start- bzw. Stoppunkt.

3.2 Messen Sie 20 mal die Schwingungsdauer T_k mit Hilfe einer Lichtschranke (Auslenkung ca. 5 cm).
Untersuchen Sie den Einfluß des Auslenkwinkels aus der Ruhelage auf die Schwingungsdauer, in dem Sie weitere 20 Schwingungen mit einer Auslenkung von 30 cm messen.

4. Auswertung

4.1 Hinweise zur Auswertung werden über den Bildschirm gegeben. Die Erfassung der Handmessung erfolgt in einem Strichlistenformular. Der Test, ob diese 200 Handmessungen näherungsweise durch eine Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve) beschrieben werden können, erfolgt mit einem speziellen Funktionspapier, dem sogenannten Wahrscheinlichkeitsnetz.

Ergibt sich bei der Darstellung näherungsweise eine Gerade, dann sind die Messwerte normalverteilt. Dargestellt wird über der Zeit t (lineare Zeitteilung auf der Abszisse) jeweils der prozentuale Anteil aller Messwerte für die $T_k < t$ gilt (dieser Wert wird auch Summenhäufigkeitsprozent SHP genannt).

Im Rahmen der Messwertverarbeitung wird die Anzahl H_i der Messungen ausgegeben, für die gilt

$$t_i \leq T_k < t_{i+1} \quad ,$$

d. h. die Anzahl von Ergebnissen in der "Säule" i. Wählen Sie bei der grafischen Darstellung günstigerweise für t die oberen Zeitgrenzen t_{n+1} Ihrer Intervalle.

Dann gilt für N Messungen

$$SHP_n \,/\, 1\% = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^{n} H_i \quad .$$

Die Werte 0 und 100% der Ordinatenskala liegen im Unendlichen, da sich die GAUSSsche Normalform asymptotisch der Abszisse nähert. Letztere werden deshalb nicht im Diagramm berücksichtigt.

4.2 Beurteilen Sie die in den Versuchspunkten 3.1. und 3.2. erzielten Genauigkeiten (Vertrauensbereiche). Ist die eventuell beobachtete Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel zufällig oder statistisch gesichert. (Überprüfen mit dem t-Test nach Student).

Überprüfen Sie dies mit dem “doppelten t-Test” nach Student.

Dabei berechnet sich die Testgröße t wie folgt:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)\, s_x^2 + (n_2 - 1)\, s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2}{n_1 + n_2}} \quad ,$$

wobei

$$\overline{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i \ , \quad \overline{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

die arithmetischen Mittel und

$$s_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \overline{x})^2 \ , \quad s_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \overline{y})^2$$

die empirischen Streuungen sind.

Bei einer statistischen Sicherheit von $P = 95\%$ ergibt sich für $n_1 = n_2 = 20$ der Wert der t-Verteilung $t_{m,q}$ aus der Tafel (mit $m = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden und dem Quantil $q = 1 - \alpha/2$) zu 2.04. Falls der berechnete Wert $|t| > 2{,}04$ ist, muß davon ausgegangen werden, dass sich die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ statistisch gesichert unterscheiden.

(Weitere Informationen siehe: "Tafel der mathematischen Statistik" von P.H. Müller, P. Neumann und R. Storm im Fachbuchverlag Leipzig, 1973)

5. Kontrollfragen

5.1 Was sind absolute und relative Fehler?

5.2 Was sind grobe, systematische und zufällige Fehler?

5.3 Begründen Sie, dass es zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels günstiger ist, N Schwingungen einmal zu messen als eine Schwingung N mal.

5.4 Leiten Sie die exakte Schwingungsgleichung (Differentialgleichung) für das mathematische Pendel ab. Wenden Sie dann die Näherung für kleine Ausschläge an, die auf die bekannte Differentialgleichung für die harmonische Schwingung führt. Überlegen Sie nun, ob die Schwingungsdauer T im allgemeinen Fall von der Amplitude der Schwingung abhängt. Bleibt T bei abnehmender Amplitude konstant, nimmt T ab oder wächst T? Begründen Sie Ihre Aussage!