E 10 Schwingkreis

1 Aufgabenstellung

1.1 Stellen Sie eine freie schwach gedämpfte Schwingung eines Reihenschwingkreises dar. Bei gegebener Kapazität C soll die Induktivität L und der OHM'sche Widerstand R_i der Spule bestimmt werden. Untersuchen Sie weiterhin den Einfluss eines Dämpfungswiderstandes R auf das Schwingungsverhalten.

1.2 Nehmen Sie für verschiedene Dämpfungen die Spannungs- und die Phasen- Resonanzkurve eines Reihenschwingkreises in Abhängigkeit von der Frequenz auf und bestimmen Sie die zugehörige Resonanzfrequenz, die Schwingkreisgüte und die Bandbreite.

2 Theoretische Grundlagen

Stichworte zur Vorbereitung:

Wechselstromgrößen, komplexe Widerstände, ungedämpfte, gedämpfte und erzwungene Schwingungen, Eigenfrequenz, Resonanzfrequenz, Reihen- und Parallelschwingkreis, Schwingkreisgüte, Dämpfungsfaktor, Bandbreite

Literatur:

W. Ilberg, M. Krötzsch	Physikalisches Praktikum, Elektrizitätslehre 5.0, 5.5, Teubner Verlag 1992
W. Demtröder	Experimentalphysik 1 Kapitel 10.4, 10.5, 10.6 Springer Verlag 1994

W. Demtröder	Experimentalphysik 2
	Kapitel 6.1
	Springer Verlag 1995
H. J. Pans	Physik
	Kapitel 45.4, 46.1
	Hanser Verlage 1995
E. Hering, R. Martin	Physik für Ingenieure, Kap. 5.1
M. Stohrer	Springer 1997
D. Zastrow	Elektrotechnik
	Kap. 23, 24, 25
	Vieweg 1993

Schwingungen treten in der Physik und in technischen Gebilden häufig auf. Es handelt sich dabei um periodische Veränderungen physikalischer Größen, wie z. B. Weg (x), Drehwinkel (φ), Ladung (Q), Strom (I) oder Spannung (U), um nur einige zu nennen. Können diese periodischen Veränderungen durch eine Sinus- bzw. Cosinusfunktion beschrieben werden, werden sie als harmonische Schwingungen der jeweiligen physikalischen Größe bezeichnet. Beispiele dafür sind Federschwinger, Drehschwinger oder der elektrische Reihenschwingkreis.

2.1 Freie Schwingungen

Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die charakteristisch für eine freie Schwingung sind, sollen hier am Beispiel eines LC-Schwingkreises dargestellt werden. Lädt man einen Kondensator C auf die Spannung U_0 und entlädt ihn über eine parallel geschaltete Spule, so müssen zu jeder Zeit die Spannungen am Kondensator und der Spule gleich groß sein:

$$-L\dot{I} = Q / C \,. \tag{1}$$

Um Q zu eliminieren ist die zeitliche Ableitung von Gl. (1) zu bilden, diese ergibt die Differentialgleichung

$$L\ddot{I} + I / C = 0 . \tag{2}$$

Sie hat genau die gleiche Struktur wie die Schwingungsgleichung für einen mechanischen harmonischen Oszillator. Analog ergibt sich für den Strom auch eine harmonische Schwingung

$$\underline{I}\,(t) = I_0 \cdot e^{i\omega_0 t} . \tag{3}$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \tag{4}$$

Nach dem OHM'schen Gesetz gilt gleiches für die Spannung. Die Parallelschaltung von Spule und Kondensator wird deshalb als elektrischer Schwingkreis bezeichnet. Genau wie beim mechanischen Oszillator tritt auch beim elektrischen Schwingkreis unvermeidlich eine Dämpfung auf, hier verursacht durch den OHM'schen Widerstand R der Leitungen. Dieser wirkt, als ob er in Reihe zu den anderen Bauelementen geschaltet ist. In Gl. (1) ist nun zusätzlich der Spannungsabfall an R zu berücksichtigen und man erhält

$$- L\dot{I} = Q / C + R I . \tag{5}$$

Die zeitliche Ableitung von Gl.(5) führt wieder zu einer homogenen Differentialgleichung der Struktur,

$$\ddot{I} + 2\,\delta\,\dot{I} + \omega_0^2\, I = 0 \tag{6}$$

wobei

$$\delta = \frac{R}{2\,L} \tag{7}$$

der Dämpfungsfaktor des elektrischen Schwingkreises ist.

In Analogie zur Mechanik ergeben sich auch hier in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Differenz $\delta^2 - \omega_0^2$ die charakteristischen Lösungen

- Schwingfall $\delta < \omega$
- Grenzfall $\delta = \omega$
- Kriechfall $\delta > \omega$

für die Differentialgleichung (6). Die Lösung für den hier interessierenden Schwingfall, d.h. schwache Dämpfung, lautet:

$$I = I_0 \; e^{(-\delta t)} \cos(\omega t - \varphi) \tag{8}$$

mit
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{9}$$

und
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\delta}{\omega}\right). \tag{10}$$

Die durch die Gl. (8) beschriebene gedämpfte Schwingung ist in Abb. 1 dargestellt.

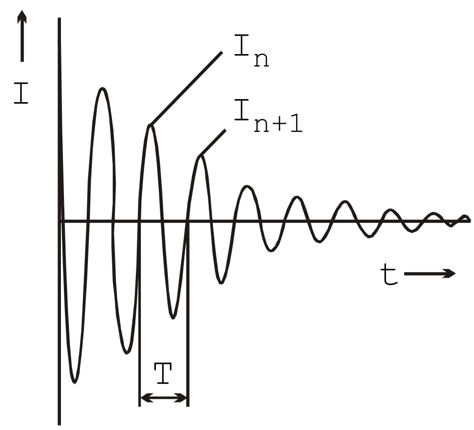

Abb. 1: Zeitlicher Verlauf einer exponentiell abklingenden gedämpften Schwingung

Aus dem Verhältnis zweier aufeinander folgender Maximalausschläge I_n und I_{n+1} kann das logarithmische Dekrement Λ bestimmt werden

$$\Lambda = \ell n \left(I_n / I_{n+1}\right) = \delta T \quad . \tag{11}$$

Die Schwingungsdauer T einer gedämpften Schwingung kann aus der Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung und dem logarithmischen Dekrement Λ berechnet werden.

$$T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2} = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{RT}{4\pi L}\right)^2} \quad . \tag{12}$$

Für kleine Dämpfungen gilt in guter Näherung

$$T \approx T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \quad . \tag{13}$$

2.2 Erzwungene Schwingungen im Reihenschwingkreis

Die Beschreibung erzwungener Schwingungen geschieht bei mechanischen Systemen durch Aufstellen der jeweiligen Bewegungsgleichung, bei den elektrischen Systemen mit Hilfe des Maschensatzes (2. KIRCHHOFF'sche Regel). Dabei entstehen Differentialgleichungen für die einzelnen physikalischen Größen, deren mathematische Formen einander äquivalent sind.

Federschwinger: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ F_0 \cdot e^{i\omega t})$ (14)

bzw. $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ K \cdot e^{i\omega t})$ (15)

mit $2\delta = r/m \ ; \ \omega_0^2 = k/m \ ; \ K = F_0/m$

Drehschwinger: $J\ddot{\varphi} + r^*\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ M_o e^{i\omega t})$ (16)

bzw. $\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_o^2 \varphi = \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ K e^{i\omega t})$ (17)

mit $2\delta = r^*/J \ ; \ \omega_0^2 = D/J \ ; \ K = M_0/J$

Elektrischer Reihenschwingkreis (Elektrische Bewegungsgleichung – 2. KIRCHHOFF'sche Regel – Maschensatz)

$$L \cdot \ddot{Q} + RQ + Q/_C = U_0 \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ \ U_o e^{i\omega t}) \tag{18}$$

bzw. $$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = K \cos \omega_a t \qquad (bzw.\ \ K e^{i\omega t}) \tag{19}$$

mit $$2\delta = R/_L\ ;\ \omega_0^2 = 1/_{LC}\ ;\ K = U_0/_L$$

Es handelt sich dabei um inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Schwingungssysteme werden harmonisch erregt. Die allgemeine Lösung der Gleichungen besteht aus der Summe einer Lösung (x_H, Q_H); der homogenen Differentialgleichung (z. B. Gl. (6)) und einer speziellen Lösung (x_S, Q_S) der inhomogenen Differentialgleichung (z. B. Gl. (19)),

z. B. <u>Federschwinger</u> $$x(t) = x_H(t) + x_S(t) \tag{20}$$

bzw. <u>Reihenschwingkreis</u> $$Q(t) = Q_H(t) + Q_S(t) \tag{21}$$

mit den Bereichen: Schwingfall $(\delta < \omega_0)$; periodischer Grenzfall $(\delta = \omega_0)$ und Kriechfall $(\delta > \omega_0)$. Da bei vorhandener Dämpfung $(\delta > 0)$ die jeweilige Amplitude der homogenen Lösung mit $\exp(-\delta t)$ abfällt, werden im Weiteren nur Zustände betrachten, für die $\delta t >> 1$ gilt, so dass $x_H << x_S$ wird. Dieser Zustand wird als stationär bezeichnet. Es gilt dann

$$x(t) = x_S(t) \quad bzw. \quad Q(t) = Q_S(t)\ . \tag{22}$$

Für die stationäre Lösung Q_S wird einen Lösungsansatz

$$Q_S = Q_0 e^{i(\omega_a t + \varphi)} \tag{23}$$

gemacht.

Wenn beim Einsetzen des Lösungsansatzes Gl. (23) in die elektrische Bewegungsgleichung Gl. (19) alle Zeitabhängigkeiten herausfallen, ist der Lösungsansatz eine Lösung.

$$\left(-\omega_a^2 + i\omega_a 2\delta + \omega_0^2 \right) Q_0 e^{i\omega_a t} \cdot e^{i\varphi} = K e^{i\omega_a t} \tag{24}$$

$$Q_0 \left(\left(\omega_0^2 - \omega_a^2 \right) + i 2\delta\omega_a \right) e^{i\varphi} = K \tag{25}$$

Da Q_0 und K reelle Größen sind, muss

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega_a^2 \right) + i2\delta\omega_a \right] \cdot e^{i\varphi}\ C = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2 \right)^2 + \left(2\delta\omega_a \right)^2} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi} \tag{26}$$

ebenfalls reell sein, $$\tan \varphi_1 = \frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \tag{27}$$

Daraus folgt: $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\varphi_1 + \varphi)} = 1$ mit $\varphi = -\varphi_1$. (28)

Für φ erhalten wir dann

$$\tan \varphi = \tan(-\varphi_1) = -\tan \varphi_1 = -\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \tag{29}$$

$$\varphi = arc \tan \left(-\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \right) \tag{30}$$

und für Q_0 als Funktion von ω

$$Q_0 = \frac{K}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2 \right)^2 + \left(2\delta\omega_a \right)^2}} \tag{31}$$

In der Elektrotechnik sind jedoch für die Behandlung von Wechselstromkreisen, d. h. auch von Reihenschwingkreisen, die Größen $U(t)$ und $I(t)$ relevant.

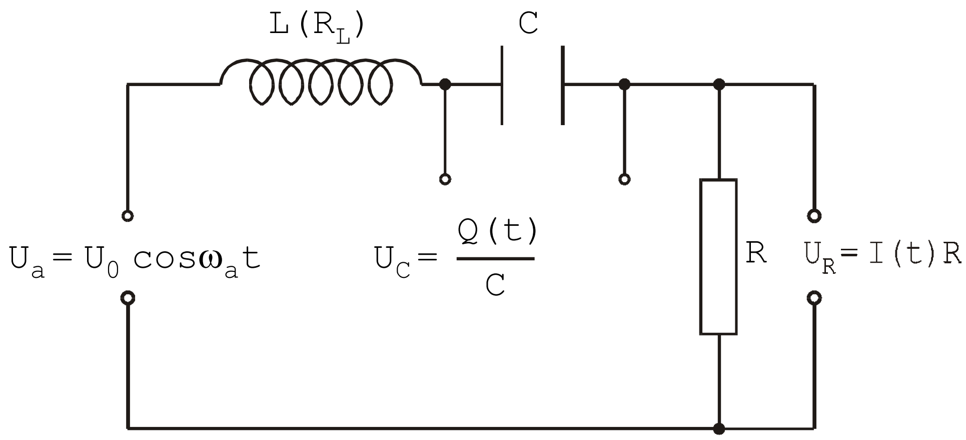

Abb. 2: Reihenschwingkreis mit äußerer Anregung U_a ist die von außen angelegte Erregerspannung.

Wird die Differentialgleichung Gl. (18) nochmals nach der Zeit differenziert, ergibt sich:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + I / C = \frac{dU(t)}{dt} \ . \tag{32}$$

Mit $U = U_0 e^{i\omega_a t}$ und dem Lösungsansatz $I(t) = I_o e^{i(\omega_a t - \varphi)}$ lässt sich Gl. (32) wie folgt darstellen:

$$\left(i^2\omega_a^2 L + i\,\omega_a R + 1 / C\right) I(t) = i\omega_a U(t) \tag{33}$$

Die Division durch $i\omega_a$ und umordnen von Gl. (33) führt zu

$$\left[R + i\left(\omega_a L - \frac{1}{\omega_a C}\right)\right] \ I(t) = U(t) \ . \tag{34}$$

Dafür kann in Analogie zum OHM'schen Gesetz

$$Z \cdot I(t) = U(t) \tag{35}$$

geschrieben werden mit $$Z = R + i\left((\omega_a L - 1/_{\omega_a C}\right) \tag{36}$$

als komplexen Wechselstromwiderstand (Impedanz). Durch eine von außen angelegte Spannung $U(t) = U_0 \cos \omega_a t$ fließt in einem Reihenschwingkreis ein Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega_a t - \varphi)$ mit den Werten für

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_a L - \frac{1}{\omega_a C}\right)^2}} \tag{37}$$

und für $$\tan \varphi = \frac{\omega_a L - \frac{1}{\omega_a C}}{R} . \tag{38}$$

Während die Amplitude $Q_0(\omega_a)$ bzw. $U_C(\omega_a)$ das Maximum bei

$$\omega_{RQ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{39}$$

hat, liegt es für $I_0(\omega)$ bei $\omega_{RI} = \omega_0$. Das Maximum der aufgenommenen Leistung einer erzwungenen Schwingung liegt in allen Fällen bei ω_0.

In Abb. 3 ist für unterschiedliche Dämpfungen die normierte Amplitudenfunktion der Spannung am Kondensator U_C in Abhängigkeit vom Verhältnis $\eta = \omega_a / \omega_0$ dargestellt. Man erkennt, dass mit steigendem Dämpfungsgrad ($D = \delta / \omega_0$) die Amplituden-(Spannungs-) Überhöhung im Resonanzfall stark abnimmt und gleichzeitig die Resonanzfrequenz zu kleineren Werten verschoben wird.

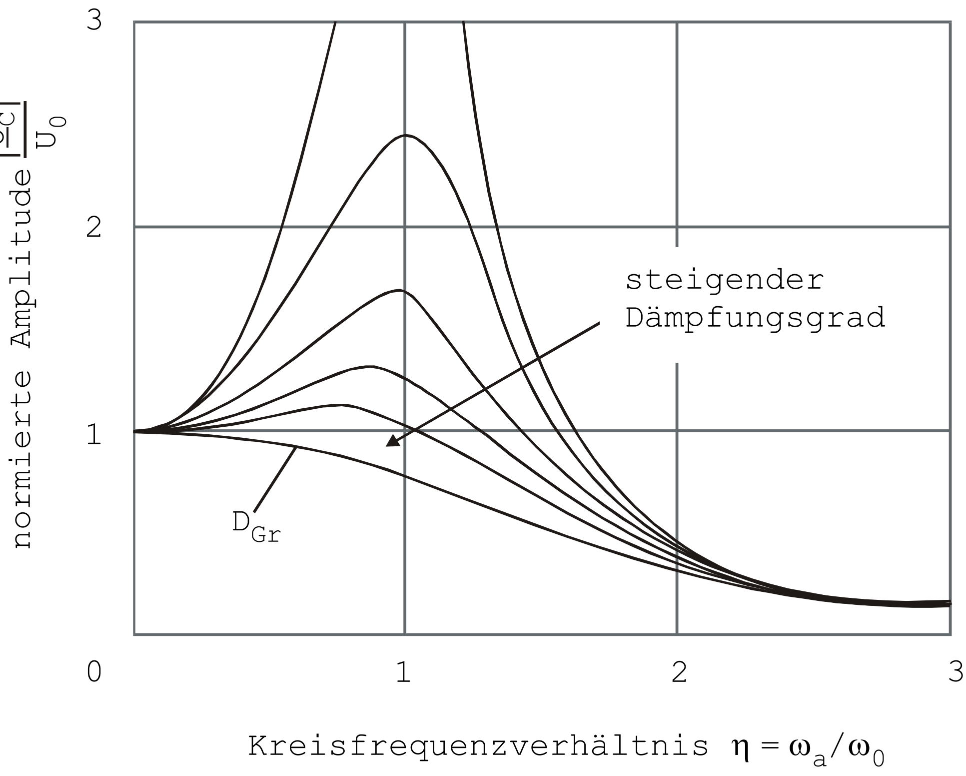

Abb. 3: Amplitudenresonanzfunktion

Diese Amplitudenüberhöhung findet nur bis zu einem Grenzdämpfungsgrad statt, für dem die Wurzel in Gl. (39) noch reell ist. Diese Grenze liegt bei

$$D_{Gr} = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{40}$$

Bei Überschreiten dieses Grenzdämpfungsgrades D_{Gr} fallen die Amplituden mit zunehmenden Kreisfrequenzverhältnissen η ständig ab (überkritische Dämpfung). Das Verhältnis von Resonanzamplitude $|\underline{U}_C|_{max}$ und der statischen Auslenkung U_O wird Resonanzüberhöhung genannt. Mit dem Dämpfungsgrad $D = \delta/\omega_o$ ergibt sich die Resonanzüberhöhung zu

$$\frac{|\underline{U}_C|_{max}}{U_0} = \frac{1}{2\,D\sqrt{1 - D^2}} \ . \tag{41}$$

Für den betrachteten Fall der geringen Dämpfung gilt in guter Näherung

$$\frac{\left|\underline{U}_C\right|_{\mathrm{max}}}{U_0} \approx \frac{1}{2\,D}\,. \tag{42}$$

Dies beschreibt die Güte eines Schwingkreises, so dass näherungsweise gilt

$$\frac{\left|\underline{U}_C\right|_{\mathrm{max}}}{U_0} \approx \frac{1}{2\,D} = q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{43}$$

Die Güte eines Schwingkreises nimmt also mit steigender Resonanzüberhöhung zu. Ein wichtiges Maß für die Trennschärfe eines Schwingkreises ist die Halbwertsbreite der Resonanzkurve. Man versteht darunter den Abstand $\Delta\omega$ der beiden Frequenzen, bei denen die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-fache ihres Maximalwertes abgesunken ist (Abb. 4).

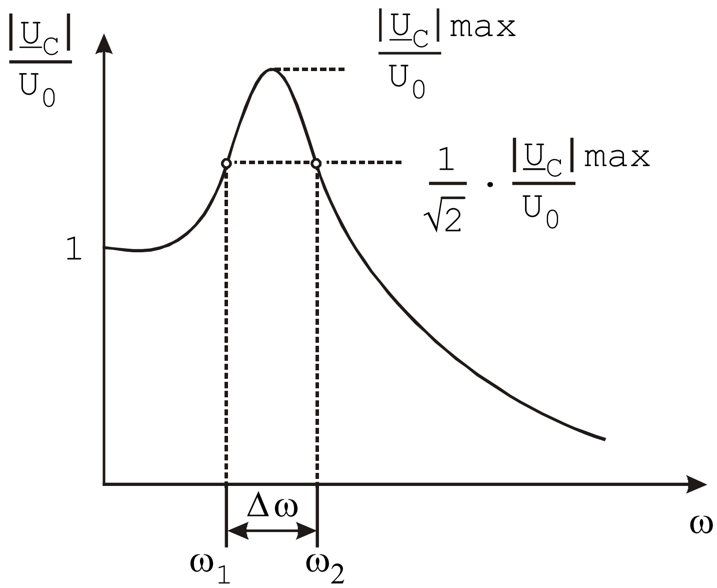

Abb. 4: Resonanzüberhöhung und Güte eines Schwingkreises

Mit der Güte q des Schwingkreises hängt auch seine Bandbreite $\Delta\omega$ zusammen. Unter ihr versteht man den Abstand der Grenzkreisfrequenzen ω_1 und ω_2, innerhalb dessen die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-fache ihres Maximalwertes abgefallen ist. Aus Gl. (41) ergibt sich für die Bandbreite

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_r}{q} \quad . \tag{44}$$

Die Darstellung des Phasenverschiebungswinkels α zwischen Ausgangs- $(\underline{U}_a)$ und Eingangsgröße $(\underline{U}_e)$ in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz wird als Phasengang bezeichnet. Der Phasenverschiebungswinkel kann aus dem Imaginärteil $(\mathrm{Im}(\underline{F}))$ und dem Realteil $(\mathrm{Re}(\underline{F}))$ einer Amplitudenfunktion F wie folgt berechnet werden

$$\alpha(\omega_a) = \sphericalangle(\underline{U}_a, \underline{U}_e) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)} \quad . \tag{45}$$

Für die Phasenverschiebung zwischen der Spannung am Kondensator $(\underline{U}_c)$ und der Erregerspannung $\underline{U}(t)$ dann

$$\alpha(\omega_a) = \arctan\frac{R}{\dfrac{1}{\omega_a C} - \omega_a L} \quad . \tag{46}$$

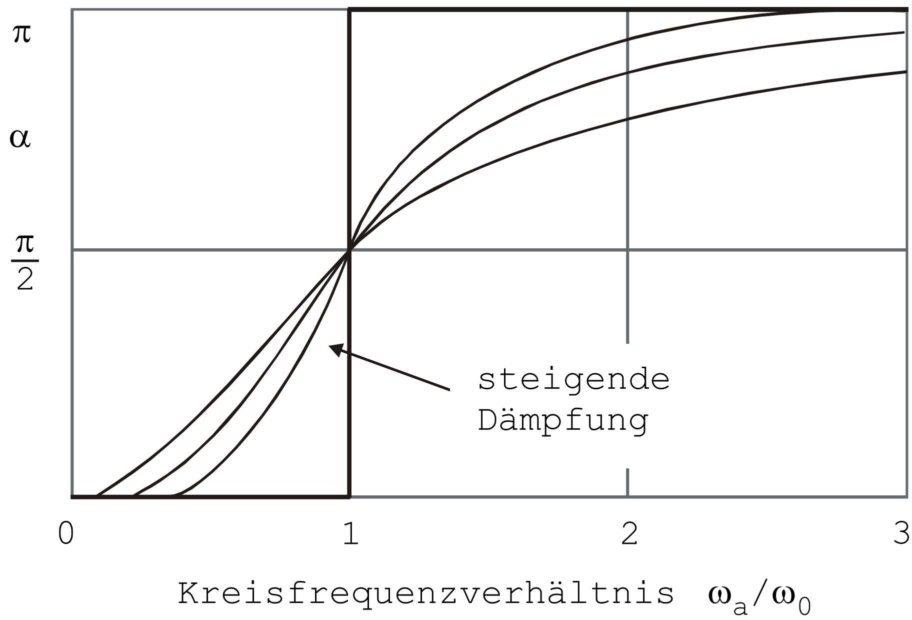

Abb. 5: Phasenresonanzfunktion

Für sehr kleine Dämpfung zeigt der Reihenschwingkreis für Erregerfrequenzen $\omega < \omega_r$ ein reinkapazitives Verhalten, d.h. die Phasenverschiebung ist Null. Für Erregerfrequenzen $\omega > \omega_r$ liegt dagegen ein reininduktives Verhalten, d.h. $\varphi = \pi$.

Bei der Resonanzfrequenz $\omega_a = \omega_r$ erfolgt im dämpfungsfreien Fall der sprunghafte Übergang vom kapazitiven zum induktiven Verhalten $(\Delta\varphi = \pi)$. Mit steigender Dämpfung wird dieser Übergang verflacht.

3. Versuchsdurchführung

Für die Versuchsdurchführung wird das an einem PC angeschlossene Messerfassungssystem "Cassy" genutzt, welches aus zwei Teilen, dem "Power Cassy" zur programmierbaren Spannungserzeugung und dem "Sensor Cassy" zur Messwertaufnahme, besteht.

Bauen Sie entsprechend Abb. 6 den Reihenschwingkreis auf der Rastersteckplatte auf. Die für den jeweiligen Versuchsteil notwendige Spannung wird dem "Power Cassy" (Ausgange U/I) entnommen, die erforderlichen Spannungen werden mit dem "Sensor Cassy" (Eingänge A/U bzw. B/U) gemessen.

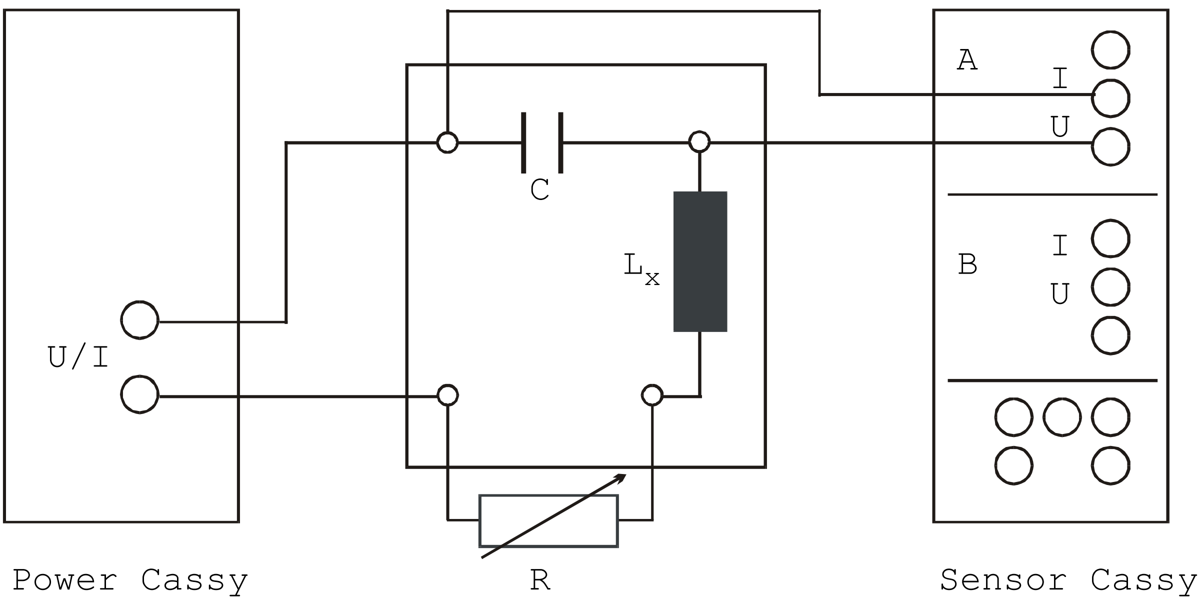

Abb. 6: Reihenschwingkreis, Messschaltung

3.1 freie gedämpfte Schwingung

Zur periodischen Anregung des Schwingkreises wird das "Power Cassy" als Impulsgenerator (z. B. Rechteckgenerator mit Tastverhältnis 20:1) verwendet. Die Frequenz dieser Anregung muss klein sein im Vergleich zur Eigenfrequenz des Schwingkreises (warum?).

Verändern Sie zunächst R zwischen 0 und seinen Maximalwert und beobachten Sie die Veränderung des Schwingungsverlaufes auf den Oszilloskop. Nehmen Sie dann den Schwingungsverlauf für charakteristische Dämpfungen mit Hilfe des "Cassy"-Systems auf.

Bestimmen Sie dann die Schwingungsdauer und die Amplituden der gedämpften Schwingung für den Fall $R = 0$ und berechnen Sie die geforderten Größen.

Führen Sie die gleichen Messungen für größere Dämpfungen $(R \neq 0)$ durch.

Ermitteln Sie die zugehörigen Schwingungsdauern und stellen Sie fest, ob innerhalb der Fehlergrenzen ein Einfluss der Dämpfung entsprechend Gl. (12) auf die Schwingungsdauer vorliegt.

3.2 Reihenschwingkreis

Die Anregung des Reihenschwingkreises erfolgt in diesem Teilexperiment durch eine sinusförmige Spannung mit konstanter Amplitude. Die Erregerfrequenz kann mit Hilfe des "Power Cassy"-Systems in wählbaren Stufen in einem vorgegebenen Frequenzbereich geändert werden, so dass eine direkte Aufnahme möglich ist. Nehmen Sie die Eingangsspannung, den Eingangsstrom sowie die Spannung über den Kondensator in Abhängigkeit von der Frequenz für 3 Dämpfungen auf.

Stellen Sie die auf die Gesamtspannung normierte Spannung am Kondensator den Gesamtstrom und die Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz grafisch dar. Diskutieren Sie die erhaltenen Verläufe hinsichtlich der Resonanzfrequenz. Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch für die 3 Dämpfungen die Güte und die Bandbreite des Schwingungskreises.

4 Kontrollfragen

4.1 Was geschieht, wenn ein Kondensator über einen Widerstand an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen ist?

4.2 Warum erreicht der Strom in einer Spule, die über einen Widerstand an eine Spannungsquelle angeschlossen wird, nicht sofort seinen Endwert?

4.3 Welche beiden Vorgänge spielen sich in einem einmal angeregten und dann sich selbst überlassenen LC-Kreis ab? Warum führen sie zu einer elektrischen Schwingung?

4.4 Wie lautet die Differentialgleichung für die freie gedämpfte elektrische Schwingung eines LCR-Kreises? Welchen mechanischen Größen entsprechen die darin vorkommenden Größen jeweils? Welche Lösung ergibt sich für unterkritische Dämpfung, wie sieht ihr Bild aus?

4.5 Wie kann man Schwingungsdauer und logarithmisches Dekrement einer freien elektrischen Schwingung experimentell bestimmen? Wie hängen sie von den Schaltelementen des Schwingkreises ab?

4.6 Wie ergibt sich in einem elektrischen Schwingkreis, der erzwungene Schwingungen ausführt, die Stromstärke aus der wirkenden Spannung?

4.7 Welcher Wechselstromwiderstand ergibt sich bei einem LCR-Kreis im Falle der Resonanz?

4.8 Wie hängen die charakteristischen Größen der Resonanzkurve eines elektrischen Schwingkreises von dessen Schaltelementen ab? Welche Zusammenhänge bestehen zu den Größen der freien gedämpften Schwingung?

4.9 Welche Funktion hat der in Abb. 2 dargestellte Schwingkreis in der Elektrotechnik?