Hannes Konrad
Martin Wolf
Johannes Iloff

— Einführung in die Astronomie I — 18.01.2008
Übung 9

1 Interstellares Gas und Staub

Die interstellare Wolke besteht aus atomaren und molekularen Wassestoff, sowie aus zwei Arten von Staubteilchen: Silikat- ($\mathrm{MgSiO_3}$) und Kohlenstoff- (C) staubteilchen. Die Silikatstaubteilchen bestehen aus $N_{\mathrm{S,ST}}$ Silikatmolekülen und die Kohlenstoffstaubteilchen bestehen aus $N_{\mathrm{C,ST}}$ Kohlenstoffatomen.

Die Masse $m_{\mathrm{ST,S/C}}$ eines kugelförmigen Staubteilchens mit Kugelradius $a_{\mathrm{S/C}}$ ist mit der Materialdichte $\rho_{\mathrm{S/C}}$ gegeben durch

$$m_{\mathrm{ST,S/C}} = \frac{4}{3}\rho_{\mathrm{S/C}}\pi a_{S/C}^3. \tag{1}$$

Die Molekülmasse von Kohlenstoff m_{C} ist die Atommasse von Kohlenstoff und beträgt $m_{\mathrm{C}} = 12,01\mathrm{u}$. Die Molekülmasse von Silikat m_{S} setzt sich aus den Atommassen von Magnesium (24,31u), Silicium (28,09u) und 3mal der Atommasse von Sauerstoff (15,999u) zusammen und beträgt $m_{\mathrm{S}} = 100,397\mathrm{u}$.

Die Molekülanzahl in einem der jeweiligen Staubteilchen ist nun gegeben über die Masses des Staubteilchens und der jeweiligen Molekülmasse:

$$N_{\mathrm{S/C,ST}} = \frac{m_{\mathrm{ST,S/C}}}{m_{\mathrm{S/C}}} \tag{2}$$

Somit befinden sich in einem Kohlenstoffstaubteilchen $N_{\mathrm{C,ST}} = 3696655$ Kohlenstoffatome und in einem Silikatstaubteilchen befinden sich $N_{\mathrm{S,ST}} = 6181870$ Silikatteilchen und nach der chemischen Summenformel somit gleichviele Siliciumatome.

Die Elementhäufigkeiten in der Wolke betragen:

$$N(H) : N(H_2) : N(Si) : N(C) = 1 : 0,1 : 3,1 \cdot 10^{-5} : 3,0 \cdot 10^{-4} \tag{3}$$

Für diese Aufgabe ist es intuitiver, wenn man die Elementhäufigkeiten, an statt auf die H-Atome, auf die Si-Atome normiert und es folgt damit:

$$N(H) : N(H_2) : N(Si) : N(C) = 32258,1 : 3225,81 : 1 : 9,68 \tag{4}$$

Auf 1 Si-Atom in der Wolke kommen also 9,68 C-Atome. Die Anzahl der Kohlenstoffstaubteilchen $N_{\mathrm{ST,C}}$ in der Wolke, wenn sich nur ein Silikatstaubteilchen ($N_{\mathrm{ST,S}} = 1$) in ihr befände, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{ST,C}} &= \frac{9,68 \cdot (N_{ST,S} \cdot N_{\mathrm{S,ST}})}{N_{\mathrm{C,ST}}} && (5) \\ &= 16,19 && (6) \end{aligned}$$

Dieser Wert ist für die spätere Normierung auf 1 Staubteilchen notwendig.

Wenn sich nur ein Silikatstaubteilchen in der Wolke befindet, so existieren $32258,1 \cdot N_{S,ST}$ H-Atome und $3225,81 \cdot N_{S,ST}$ H_2-Moleküle in ihr. Die Anzahl der H-Atome N_{H} für ein Silikatstaubteilchen ist somit

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{H}} &= (32258,1 + 2 \cdot 3225,81) \cdot N_{S,ST} && (7) \\ &= 2,393 \cdot 10^{11} && (8) \end{aligned}$$

Zu dem einen Silikatstaubteilchen kommen, wie oben berechnet, noch 16,19 Kohlenstoffstaubteilchen hinzu. Die Anzahl der Wasserstoffatome pro Staubteilchen $N_{\mathrm{H,ST}}$ ist daher:

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{H,ST}} &= \frac{N_{\mathrm{H}}}{N_{\mathrm{ST,S}} + N_{\mathrm{ST,C}}} && (9) \\ &= 1,392 \cdot 10^{10} && (10) \end{aligned}$$

2 Der gravitative Kollaps

2.1 Teilaufgabe a)

Damit eine interstellare Wolke kollabiert, muss sie mindestens die Masse der Jeansmasse besitzen. Die Jeansmasse ist in der Einheit von Sonnenmassen gegeben durch

$$M_J \approx \frac{11,74}{\overline{\mu}^2} \sqrt{\frac{T^3}{n_H}}. \tag{11}$$

Dabei ist $\overline{\mu}$ das mittlere Molekulargewicht (atomarer Wasserstoff: 1, molekularer Wasserstoff: 2), T die Temperatur der Wolke und n_H die Atomdichte des atomaren Wasserstoffs in der Wolke in Einheit cm^{-3}.

2.1.1 i) H_2-Wolke

Für eine H_2-Wolke mit $T = 10\mathrm{K}$, $n_H = 10^5 \mathrm{cm}^{-3}$, $\overline{\mu} = 2$ und $M = 10^5 M_\odot$ beträgt die Jeansmasse $M_J \approx 0,29 M_\odot$. Die H_2-Wolke ist also gravitativ instabil.

2.1.2 ii) H-Wolke

Für eine H-Wolke mit $T = 100\mathrm{K}$, $n_H = 10\mathrm{cm}^{-3}$, $\overline{\mu} = 1$ und $M = 10 M_\odot$ beträgt die Jeansmasse $M_J \approx 3712,51 M_\odot$. Die H-Wolke ist also gravitativ stabil.

2.2 Teilaufgabe b)

Beim dynamischen Kollaps verringert sich zu Beginn die Temperatur durch Abstrahlungsprozesse und bleibt dann in dieser Phase konstant. Da die Temperatur mit $T^{3/2}$ in die Gravitationsinstabilität ($\rightarrow$ Jeansmasse) eingeht, verringert sich dadurch auch die Jeansmasse und die Gravitationsinstabilität steigt.

3 Akkretion

Angenommen der Wasserstoff (Masse m) bewegt sich bei der Akkretion auf den Stern (Masse M, Sternradius R) in Kreisbahnen um diesen, so gilt für jeden festen Kreisbahnradius r das Kräftegleichgewicht zwischen Gravitationskraft des Sterns und der Radialkraft des Wasserstoffs:

$$F_G = F_R \tag{12}$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{13}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2 \tag{14}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und v die Bahngeschwindigkeit. Bei der Akkretion verschwindet der anfängliche Drehimpuls $l = r \cdot p = r \cdot mv \Rightarrow v^2 = \frac{l^2}{r^2 m^2}$ des Wasserstoff. Die Bahngeschwindigkeit des Wasserstoffs lässt durch dessen Drehimpuls ersetzen. Für den Bahnradius folgt demnach:

$$\frac{GM}{r} = \frac{l^2}{r^2 m^2} \tag{15}$$

$$GMr = \frac{l^2}{m^2} \tag{16}$$

$$r = \frac{l^2}{GMm^2} \tag{17}$$

Bei der Dissipation des Drehimpulses nähert sich der Wasserstoff dem Stern in dessen zentralen Gravitationspotential. Dabei wird die potentielle Energie ΔE freigesetzt, die nur vom Anfangs- und Endpunkt der Radialbewegung abhängig ist.

$$\Delta E = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{18}$$

In unserem System ist dabei $r_2 = R$ und $r_1 = r$:

$$\Delta E = \frac{G^2M^2m^3}{l^2} - \frac{GMm}{R} \tag{19}$$

Zu Begin der Akkretion besitzt der Wasserstoff einen sehr hohen Drehimpuls, da er sich sehr vermutlich sehr weit vom Stern entfernt befindet. Der erste Term in Gleichung 19 verschwindet also und es bleibt für die freigesetzte Energie bei der Akkretion:

$$|\Delta E| = \frac{GMm}{R} \tag{20}$$

3.1 Teilaufgabe i)

Die freigesetzte Energie für 1g Wasserstoff auf einen Protostern ($R = 2R_\odot$, $M = 0,5M_\odot$) beträgt $|\Delta E| = 4,77 \cdot 10^7$J.

3.2 Teilaufgabe ii)

Die freigesetzte Energie für 1g Wasserstoff auf einen Neutronenstern ($R = 10$km, $M = 1M_\odot$) beträgt $|\Delta E| = 1,33 \cdot 10^{13}$J.

3.3 Teilaufgabe iii)

Für die Kernfussion des Wasserstoffs zu Helium betrachte ich die Proton-Proton-Reaktion. Folgende Reaktionen (mit ihren Energiebilanzen) treten dabei auf:

$$\begin{aligned}
{}^1\mathrm{H}^+ + {}^1\mathrm{H}^+ &\rightarrow {}^2\mathrm{H}^+ + e^+ + \nu_e(0,26\mathrm{MeV}) + 0,42\mathrm{MeV} && (21)\\
e^+ + e^- &\rightarrow 2\gamma + 1,022\mathrm{MeV} && (22)\\
{}^2\mathrm{H}^+ + {}^1\mathrm{H}^+ &\rightarrow {}^3\mathrm{He}^{2+} + \gamma + 5,49\mathrm{MeV} && (23)\\
{}^3\mathrm{He}^{2+} + {}^3\mathrm{He}^{2+} &\rightarrow {}^4\mathrm{He}^{2+} + 2\,{}^1\mathrm{H}^+ + 12,86\mathrm{MeV} && (24)
\end{aligned}$$

Die ersten drei Reaktionen müssen doppelt ablaufen, damit schließlich die vierte Reaktion das Helium produzieren kann. Die Energie von 0,26MeV trägt das Neutrino als kinetische Energie aus dem System heraus und wird dadurch nicht mit berücksichtigt. Für die Gesamtenergie, die bei der Umsetzung von 4 H-Atomen zu einem He-Atom freigesetzt wird folgt also:

$$\begin{aligned}
\Delta E_0 &= 2\left[(0,42\mathrm{MeV} - 0,26\mathrm{MeV}) + 1,022\mathrm{MeV} + 5,49\mathrm{MeV}\right] + 12,86\mathrm{MeV} && (25)\\
&= 26,204\mathrm{MeV} && (26)
\end{aligned}$$

Die Anzahl der H-Atome in 1g Wasserstoff ist:

$$\begin{aligned}
N_{H^+} &= \frac{0,001\mathrm{kg}}{1,008u} && (27)\\
&= 5,974 \cdot 10^{23} && (28)
\end{aligned}$$

Für die freigesetzte Energie bei der Fussion von 1g Wasserstoff zu Helium folgt dementsprechend:

$$\Delta E = \Delta E_0 \cdot \frac{N_{H^+}}{4} \tag{29}$$

$$= 3,914 \cdot 10^{24}\mathrm{MeV} \tag{30}$$

$$= 6,27 \cdot 10^{11}\mathrm{J} \tag{31}$$

3.4 Vergleich der freigesetzten Energien

$$\Delta E_{\mathrm{i}} < \Delta E_{\mathrm{iii}} < \Delta E_{\mathrm{ii}} \tag{32}$$

Die meiste Energie wird bei der Akkretion auf einen Neutronenstern frei.